

## 05 - Ableitungen

### Vorkurs Mathematik SoSe 2022

Lukas Mürmann

Fakultät Informatik - Lehrstuhl 7 - TU Dortmund

14.03.2022

# Ableitungen

1 / 16

2 / 16

## Differenzierbarkeit

## Die Ableitungsregeln

- Was ist die Ableitung einer Funktion/Abbildung?
- Zur Klärung dieser Frage müssten wir uns erst einmal mit dem Begriff der Differenzierbarkeit auseinandersetzen:
  - ▶ Was bedeutet differenzierbar?
  - ▶ Es existiert  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$
  - ▶ Die obige Formel nennt man auch den Differentialquotienten von  $f$ .
  - ▶ Dieser existiert übrigens nur für Funktionen auf den reellen bzw. komplexen Zahlen (ein- oder mehrdimensional).
  - ▶ Für das genaue Verständnis benötigen wir u.a. Grundlagen über Grenzwerte und Stetigkeit.
  - ▶ Mehr dazu in Mafl 2
- Heute: Wiederholung der Ableitungsregeln aus der Schule!

- Welche Ableitungsregeln kennt Ihr noch aus der Schule?
  - ▶ Summenregel
  - ▶ Produktregel
  - ▶ Quotientenregel
  - ▶ Kettenregel
- Wir setzen bei den heute behandelten Funktionen deren Differenzierbarkeit voraus.
- Auf die zu beachtenden Formalitäten (wie ist die Funktion differenzierbar?) werden wir nicht weiter eingehen.
- Der Fokus liegt heute auf den reinen Rechenregeln.

3 / 16

4 / 16

## Ableiten von Monomen

- Starten wir mit dem Ableiten eines **Monoms** (z.B.  $x^3$ ).
- Ein Monom wird abgeleitet, indem man:
  - ▶ Mit dem ursprünglichen Exponenten multipliziert
  - ▶ und anschließend den Exponenten um eins erniedrigt, hier also:

$$(x^3)' = 3 \cdot x^{3-1} = 3 \cdot x^2$$

- ▶ Ein Beispiel mit negativem Exponenten:

$$(x^{-2})' = (-2) \cdot x^{-2-1} = (-2) \cdot x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

## Bemerkung 5.1 Monome

- Für  $n \in \mathbb{Q}$  und  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

5 / 16

## Ableiten von Polynomen

- Betrachten wir als nächstes ein sehr einfaches **Polynom**, also eine Summe von Monomen.
- Dieses leiten wir mithilfe der sogenannten **Summenregel** ab.
- Diese besagt, dass man Summen ableitet, indem man jeweils die einzelnen Summanden ableitet:

Beispiel 5.1 Ableiten von  $(x^3 + x^2)$ 

$$(x^3 + x^2)' = (x^3)' + (x^2)' = 3x^2 + 2x$$

- Allgemein lautet die Summenregel:

## Satz 5.1 Summenregel

Für zwei Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  gilt:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

6 / 16

## Ableiten mit Koeffizienten

- Wie geht man mit konstanten Faktoren vor einer abzuleitenden Funktion um?

Beispiel 5.2 Ableiten von  $4x^3$ 

Wie man  $x^3$  ableitet ist uns nun bekannt. Der konstante Faktor 4 wird hier beim Ableiten einfach mitgezogen:

$$(4 \cdot x^3)' = 4 \cdot (x^3)' = 4 \cdot 3 \cdot x^2 = 12x^2$$

- Allgemein wird dies als sogenannte **Faktorregel** aufgefasst:

## Bemerkung 5.2 Faktorregel

Für eine Funktion  $f(x)$  und  $a \in \mathbb{R}$  gilt:

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$$

7 / 16

## Übung: Ableitung von Polynomen bilden

- Nun können wir Polynome ableiten!
- Das üben wir nochmal kurz.
- Gesucht sind die Ableitungen von:
  1.  $f_1(x) = -x^2 + 4x - 3$
  2.  $f_2(x) = 2x^{13} + 3x^4 - 3x^2 + 14x$
  3.  $f_3(x) = 5x^{-2} + 3x$

- Lösungen:

1.  $f_1'(x) = -2x + 4$
2.  $f_2'(x) = 26x^{12} + 12x^3 - 6x + 14$
3.  $f_3'(x) = \frac{-10}{x^3} + 3$

8 / 16

## Produktregel

- Wir wissen also, wie wir Summen von Funktionen ableiten können.
- Aber wie sieht es mit Produkten bzw. Quotienten von Funktionen aus?

### Satz 5.2 Produktregel

Für das Produkt aus zwei Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  gilt:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Übersichtlicher als Merkregel ohne Argumente der Funktionen:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

9 / 16

## Beispiel Produktregel

### Beispiel 5.3 Ableiten von $(2x^2 \cdot 4x^3)$

Wir könnten das einfach ausmultiplizieren und dann ableiten, aber wir wollen hier die Produktregel nutzen:

$$\underbrace{(2x^2)}_f \cdot \underbrace{(4x^3)}_g \Big)' = \underbrace{4x}_{f'} \cdot \underbrace{4x^3}_g + \underbrace{2x^2}_f \cdot \underbrace{12x^2}_{g'} = 16x^4 + 24x^4 = 40x^4$$

- Sinnvoller ist die Produktregel z.B. bei folgenden Typen von Ableitungen:

$$(2x^2 \cdot \sin(x))' = ?$$

- Hier kann man auch nicht mehr einfach ausmultiplizieren. Mit der Produktregel ergibt sich:

$$\underbrace{(2x^2)}_f \cdot \underbrace{\sin(x)}_g \Big)' = \underbrace{4x}_{f'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_g + \underbrace{2x^2}_f \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'} = 2x \cdot (2 \sin(x) + x \cdot \cos(x))$$

10 / 16

## Quotientenregel

### Satz 5.3 Quotientenregel

- Für zwei Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  mit  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

- Hier wieder übersichtlicher als Merkregel ohne Argumente der Funktionen:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

11 / 16

## Ableiten mit der Quotientenregel

### Beispiel 5.4

Betrachten wir nun die Ableitung des Quotienten der zwei Funktionen  $f(x) = x^3$  und  $g(x) = 2x^2 - 8$ , wobei wir  $\{-2, 2\}$ , also die Nullstellen von  $g(x)$ , ausschließen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(\frac{x^3}{2x^2 - 8}\right)' = \frac{\underbrace{(3x^2)}_{f'} \cdot \underbrace{(2x^2 - 8)}_g - \underbrace{(x^3)}_f \cdot \underbrace{(4x^1)}_{g'}}{\underbrace{(2x^2 - 8)^2}_{g^2}} \\ &= \frac{6x^4 - 24x^2 - 4x^4}{(2x^2 - 8)^2} = \frac{2x^4 - 24x^2}{(2x^2 - 8)^2} \end{aligned}$$

12 / 16

## Kettenregel Teil 1

- Die **Kettenregel** ermöglicht es, die Ableitung von Verkettungen von Funktionen zu berechnen.
- Um diese Regel anwenden zu können, müssen wir erst klären, was eine **Verkettung von Funktionen** eigentlich ist.
- Sehen wir uns dazu ein Beispiel an:

$$f(x) = \sin(2x + 3)$$

- ▶  $f$  ist eine verkettete Funktion, bestehend aus der **Hintereinanderausführung** der Funktionen:
- ▶  $f_1 : x \mapsto 2x + 3$  und  $f_2 : x \mapsto \sin x$ .
- ▶ Mathematisch:  $f(x) = f_2(f_1(x)) = (f_2 \circ f_1)(x)$
- ▶ Das Verkettungssymbol ( $\circ$ ) wird gelesen als "nach".
- ▶ **Achtung:** Hier wird von rechts nach links gearbeitet.
- ▶ Erst das, was nahe am  $x$  steht anwenden und dann weiter.

13 / 16

## Kettenregel Teil 2

- Bei einer verketteten Funktion ( $f(g(x))$ ) muss der Wertebereich von  $g$  im Definitionsbereich von  $f$  enthalten sein.
- Ansonsten können die beiden Funktionen nicht hintereinander ausgeführt werden.

### Satz 5.4 Kettenregel

Für die Verkettung zweier Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  gilt:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- Eine gute Merkregel dabei ist: „**Äußere mal innere Ableitung**“
- Hier im Satz ist  $f'(g(x))$  die äußere Ableitung und  $g'(x)$  die innere Ableitung.

14 / 16

## Ableiten mit der Kettenregel

## Quellen und Literatur

### Beispiel 5.5

Berechnen wir mithilfe der Kettenregel die Ableitung der Funktion  $(\sin(x) + 1)^3$ :

$$\left( (\sin(x) + 1)^3 \right)' = \underbrace{3 \cdot (\sin(x) + 1)^2}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{\cos x}_{g'(x)}$$

- [1] Akad. Dir. Dr. Martin Scheer, Maximilian Sperber „Mathematischer Vorkurs“. TU Dortmund 2021.